D Macierze

Macierze pojawiają się w wielu zastosowaniach, między innymi, choć bynajmniej nie wyłącznie, w obliczeniach naukowych. Jeśli Czytelnik zapoznał się już wcześniej z macierzami, spora część zawartości tego dodatku może być już mu znana, ale pewne fragmenty mogą okazać się całkiem nowe. Dodatek D.1 jest poświęcony podstawowym pojęciom związanym z macierzami oraz operacjom na macierzach, a dodatek D.2 dotyczy podstawowych własności macierzy.

D.1 Macierze i operacje na macierzach

W tym dodatku dokonamy przeglądu podstawowych pojęć związanych z macierzami oraz omówimy najważniejsze ich własności.

Macierze i wektory

Macierz jest prostokątną tablicą zawierającą liczby. Na przykład

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.1}$$

jest macierzą $A = (a_{ij})$ wymiaru 2×3, gdzie dla $i = 1, 2$ i $j = 1, 2, 3$ elementem macierzy w wierszu i i kolumnie j jest a_{ij}. Używamy wielkich liter do oznaczenia macierzy i odpowiadających im małych liter z indeksami do oznaczania ich elementów. Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ zawierających liczby rzeczywiste oznaczamy $\mathbb{R}^{m \times n}$. W ogólnym przypadku zbiór macierzy $m \times n$ o elementach ze zbioru S zapisujemy jako $S^{m \times n}$.

Macierz ***transponowaną*** macierzy A oznaczamy A^{T} i otrzymujemy ją, zamieniając wiersze z kolumnami w macierzy A. Na przykład dla macierzy A jak w równaniu (D.1) macierz transponowana A^{T} wygląda tak:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wektor jest jednowymiarową tablicą liczb. Na przykład

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

jest wektorem wymiaru 3. Wektor wymiaru n nazywamy czasem ***n-wektorem***. Do oznaczenia wektorów używamy małych liter, i-ty element wektora wymiaru n oznaczamy przez x_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Ustalamy też standardową postać wektora jako ***wektor kolumnowy*** równoważny macierzy $n \times 1$; odpowiadający mu ***wektor wierszowy*** otrzymujemy, wykonując operację transpozycji:

$$x^{\mathrm{T}} = (\, 2 \;\; 3 \;\; 5 \,).$$

Wektor jednostkowy e_i to taki wektor, którego i-ty element jest równy 1, a wszystkie pozostałe 0. Zazwyczaj wymiar wektora jednostkowego jednoznacznie wynika z kontekstu.

Macierz zerowa to macierz, której każdy element jest równy 0. Do jej oznaczenia używamy symbolu 0. Nie prowadzi to do niejednoznaczności, gdyż zwykle z kontekstu jasno wynika, czy chodzi o macierz zerową, czy o liczbę 0. Jeśli mamy na myśli macierz zerową, to znany jest też z reguły jej wymiar.

Macierze kwadratowe

Szczególnie często rozważa się ***macierze kwadratowe*** $n \times n$. Na specjalną uwagę zasługują następujące ich rodzaje:

1. ***Macierz diagonalna*** spełnia warunek: $a_{ij} = 0$, jeśli tylko $i \neq j$. Ponieważ wszystkie elementy leżące poza przekątną są równe zeru, macierz tego typu jest jednoznacznie wyznaczona przez elementy leżące na przekątnej:

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. ***Macierz jednostkowa*** (identycznościowa) $n \times n$ oznaczana przez I_n jest macierzą diagonalną z jedynkami na przekątnej:

$$\begin{aligned} I_n &= \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Kiedy I pojawia się bez indeksu, wymiar macierzy wynika z kontekstu; i-ta kolumna macierzy jednostkowej jest wektorem jednostkowym e_i.

3. ***Macierz trójdiagonalna*** T to taka, dla której $t_{ij} = 0$, jeśli tylko $|i - j| > 1$. Niezerowe elementy występują tylko na głównej przekątnej, bezpośrednio nad nią ($t_{i,i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$) lub bezpośrednio pod nią ($t_{i+1,i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$):

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{n-2,n-2} & t_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t_{n-1,n-2} & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. ***Macierz trójkątna górna*** U to taka, dla której $u_{ij} = 0$, jeśli $i > j$. Wszystkie elementy poniżej przekątnej są więc równe 0:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Macierz trójkątną górną nazywamy ***jednostkową macierzą trójkątną górną***, jeśli ma same jedynki na przekątnej.

5. ***Macierz trójkątna dolna*** L to taka, dla której $l_{ij} = 0$, jeśli $i < j$. Wszystkie elementy powyżej przekątnej są więc równe 0:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Macierz trójkątną dolną nazywamy ***jednostkową macierzą trójkątną dolną***, jeśli ma same jedynki na przekątnej.

6. ***Macierz permutacyjna*** P ma dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz same zera na wszystkich pozostałych pozycjach. Przykładem macierzy permutacyjnej jest

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nazwa bierze się stąd, że pomnożenie wektora x przez taką macierz daje w wyniku permutację (przestawienie) elementów x. W zadaniu D.1-4 zbadamy dodatkowe własności macierzy permutacyjnych.

7. ***Macierz symetryczna*** A spełnia warunek $A = A^{\mathrm{T}}$. Na przykład

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

jest macierzą symetryczną.

Podstawowe operacje na macierzach

Elementami macierzy i wektorów są ***wielkości skalarne*** z ustalonej struktury algebraicznej, takiej jak liczby rzeczywiste, zespolone lub całkowite modulo pewna liczba pierwsza. W strukturze takiej muszą być określone operacje dodawania i mnożenia. Rozszerzymy teraz te działania na macierze.

Dodawanie macierzy definiujemy następująco. Jeśli $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ są macierzami $m \times n$, to ich suma $C = (c_{ij}) = A + B$ jest macierzą $m \times n$ zdefiniowaną w taki oto sposób:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Dodawanie macierzy jest więc zdefiniowane po współrzędnych. Macierz zerowa jest elementem neutralnym operacji dodawania macierzy:

$$A + 0 = A = 0 + A .$$

Jeśli λ jest wielkością skalarną, a $A = (a_{ij})$ – macierzą, to $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ jest ***skalarną wielokrotnością*** macierzy A uzyskaną przez pomnożenie każdego jej elementu przez λ. Jako szczególny przypadek definiujemy ***macierz przeciwną*** do macierzy $A = (a_{ij})$ jako $-1 \cdot A = -A$; zatem element macierzy $-A$ o współrzędnych (i, j) jest równy $-a_{ij}$. Zachodzi więc

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A .$$

Po wprowadzeniu tej definicji możemy zdefiniować ***odejmowanie macierzy*** jako dodanie macierzy przeciwnej: $A - B = A + (-B)$.

Mnożenie macierzy definiujemy w następujący sposób. Bierzemy dwie macierze A i B ***pasujące do siebie*** w tym sensie, że liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. (W ogólności, jeśli w wyrażeniu występuje iloczyn macierzy AB, to zawsze domyślnie zakładamy, że macierze A i B pasują do siebie). Jeśli $A = (a_{ik})$ jest macierzą $p \times q$, a $B = (b_{kj})$ jest macierzą $q \times r$, to ich iloczyn $C = AB$ jest macierzą $C = (c_{ij})$ wymiaru $p \times r$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \tag{D.2}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, p$ i $j = 1, 2, \ldots, r$. Procedura RECTANGULAR-MATRIX-MULTIPLY na str. 354 mnoży macierze w sposób bezpośrednio wynikający ze wzoru (D.2), przy założeniu, że macierz C jest zainicjowana jako 0, wykonując pqr mnożeń oraz $p(q-1)r$ dodawań wielkości skalarnych i działając w czasie $\Theta(pqr)$. Jeśli macierze są kwadratowe $n \times n$, czyli $n = p = q = r$, to pseudokod upraszcza się do procedury MATRIX-MULTIPLY ze str. 76 , której czas działania to $\Theta(n^3)$. (W podrozdziale 4.4 jest opisany asymptotycznie szybszy algorytm V. Strassena działający w czasie $\Theta(n^{\lg 7})$).

Macierze mają wiele (choć nie wszystkie) algebraicznych własności typowych dla liczb. Macierze jednostkowe są elementami neutralnymi operacji mnożenia macierzy:

$$I_m A = A I_n = A$$

dla dowolnej macierzy A wymiaru $m \times n$. Pomnożenie przez macierz zerową daje macierz zerową:

$$A\,0 = 0.$$

Mnożenie macierzy jest łączne:

$$A(BC) = (AB)C$$

dla pasujących do siebie macierzy A, B i C. Jest też rozdzielne względem dodawania:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC, \\ (B+C)D &= BD + CD. \end{aligned}$$

Dla $n > 1$ mnożenie macierzy $n \times n$ nie jest jednak przemienne. Na przykład, jeśli $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, to

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zaś

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iloczyny macierzy przez wektor i wektora przez wektor są zdefiniowane przez utożsamienie wektora z macierzą $n \times 1$ (lub macierzą $1 \times n$ w przypadku wektora wierszowego). Jeśli więc A jest macierzą $m \times n$, a x jest wektorem wymiaru n, to Ax jest wektorem wymiaru m. Jeśli x i y są wektorami wymiaru n, to

$$x^{\mathrm{T}} y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

jest liczbą (formalnie: macierzą 1×1) nazywaną ***iloczynem skalarnym*** x i y. Do oznaczenia $x^{\mathrm{T}} y$ stosujemy również notację $\langle x, y\rangle$. Iloczyn skalarny jest przemienny: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Macierz xy^{T} jest macierzą Z wymiaru $n \times n$ (nazywaną ***iloczynem zewnętrznym*** x i y) taką, że $z_{ij} = x_i y_j$. ***Norma (euklidesowa)*** $\|x\|$ wektora x wymiaru n jest zdefiniowana następująco:

$$\begin{aligned}\|x\| &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \\ &= (x^{\mathrm{T}}x)^{1/2}.\end{aligned}$$

Jest to więc długość wektora x w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Użytecznym faktem wynikającym z równości

$$((ax_1)^2 + (ax_2)^2 + \cdots + (ax_n)^2)^{1/2} = |a|\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

jest to, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a oraz wektora x wymiaru n

$$\|ax\| = |a|\,\|x\|\,. \tag{D.3}$$

Zadania

D.1-1
Wykaż, że jeśli A i B są symetrycznymi macierzami $n \times n$, to $A + B$ i $A - B$ też są takimi macierzami.

D.1-2
Udowodnij, że $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ oraz że $A^{\mathrm{T}}A$ jest zawsze macierzą symetryczną.

D.1-3
Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy trójkątnych dolnych jest macierzą trójkątną dolną.

D.1-4
Udowodnij, że jeśli P jest macierzą permutacyjną $n \times n$, zaś A jest dowolną macierzą $n \times n$, to PA można otrzymać z macierzy A przez permutację jej wierszy, a AP przez permutację kolumn. Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy permutacyjnych jest macierzą permutacyjną.

D.2 Podstawowe własności macierzy

W tym dodatku zdefiniujemy podstawowe własności odnoszące się do macierzy: odwrotność, liniową zależność i liniową niezależność, rząd i wyznacznik. Zdefiniujemy także klasę macierzy dodatnio określonych.

Macierze odwrotne, rzędy i wyznaczniki

Macierz odwrotną do macierzy A wymiaru $n \times n$ oznaczamy przez A^{-1} (jeśli istnieje) i definiujemy jako macierz $n \times n$ taką, że $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Na przykład

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wiele niezerowych macierzy kwadratowych nie ma macierzy odwrotnych. Macierz, do której nie istnieje macierz odwrotna, nazywamy macierzą ***nieodwracalną*** lub ***osobliwą***. Przykładem niezerowej macierzy osobliwej jest

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeśli dla danej macierzy istnieje macierz odwrotna, to macierz tę nazywamy ***odwracalną*** lub ***nieosobliwą***. Macierze odwrotne, jeśli istnieją, są wyznaczone jednoznacznie (patrz zad. D.2-1). Jeśli A i B są nieosobliwymi macierzami $n \times n$, to

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Operacja odwracania macierzy jest przemienna z operacją transponowania:

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są ***liniowo zależne***, jeśli istnieją współczynniki $c_1, c_2, \ldots, c_n$, nie wszystkie równe zeru, takie że $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$. Na przykład wektory wierszowe $x_1 = (1 \quad 2 \quad 3)$, $x_2 = (2 \quad 6 \quad 4)$ oraz $x_3 = (4 \quad 11 \quad 9)$ są liniowo zależne, ponieważ $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$. Jeśli wektory nie są liniowo zależne, to mówimy, że są ***liniowo niezależne***. Na przykład kolumny macierzy jednostkowej są liniowo niezależne.

Rząd kolumnowy niezerowej macierzy A wymiaru $m \times n$ definiujemy jako moc największego zbioru liniowo niezależnych kolumn macierzy A. Podobnie, ***rząd wierszowy*** macierzy A określamy jako moc największego zbioru liniowo niezależnych wierszy macierzy A. Podstawową własnością każdej macierzy A jest fakt, że rząd wierszowy jest zawsze równy rzędowi kolumnowemu, tak więc możemy po prostu mówić o ***rzędzie*** macierzy A; oznaczamy go przez $\mathrm{rank}(A)$. Rząd macierzy $m \times n$ jest liczbą całkowitą z przedziału od 0 do $\min\{m, n\}$ włącznie. (Rząd macierzy zerowej wynosi 0, a rząd macierzy jednostkowej $n \times n$ jest równy n). Według innej, równoważnej, a często bardziej użytecznej definicji rząd macierzy A wymiaru $m \times n$ jest najmniejszą liczbą r o tej własności, że istnieją macierze B i C wymiaru, odpowiednio, $m \times r$ i $r \times n$, takie że $A = BC$. Macierz kwadratowa $n \times n$ ma ***pełny rząd***, jeśli jej rząd jest równy n. Macierz $m \times n$ ma ***pełny rząd kolumnowy***, jeśli jej rząd jest równy n. Podstawową własność rzędów macierzy charakteryzuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie D.1
Macierz kwadratowa ma pełny rząd wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. ■

Wektor zerujący macierzy A to taki wektor niezerowy x, że $Ax = 0$. Poniższe twierdzenie, którego dowód pozostawiamy jako zadanie D.2-7, oraz wynikający z niego wniosek odnoszą pojęcia rzędu kolumnowego oraz odwracalności do wektorów zerujących.

Twierdzenie D.2
Macierz A ma pełny rząd kolumnowy wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma wektorów zerujących. ■

Wniosek D.3
Macierz kwadratowa A jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy ma wektor zerujący. ■

Minorem ij macierzy A wymiaru $n \times n$, dla $n > 1$, nazywamy macierz $A_{[ij]}$ wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ otrzymaną przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy A. ***Wyznacznik*** macierzy A wymiaru $n \times n$ definujemy rekurencyjnie za pomocą minorów

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & \text{jeżeli } n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{[1j]}), & \text{jeżeli } n > 1. \end{cases}$$

Wyrażenie $(-1)^{i+j} \det(A_{[ij]})$ jest nazywane ***dopełnieniem algebraicznym*** (ang. *cofactor*) elementu a_{ij}.

Następujące twierdzenia, których dowody tu pomijamy, charakteryzują podstawowe własności wyznacznika.

Twierdzenie D.4 (Własności wyznacznika)
Wyznacznik macierzy kwadratowej A ma następujące własności:

- Jeśli którykolwiek wiersz lub którakolwiek kolumna macierzy A jest zerowa, to $\det(A) = 0$.
- Wyznacznik macierzy A mnoży się przez λ, jeśli wszystkie elementy jednego wiersza (lub jednej kolumny) macierzy A zostały pomnożone przez λ.
- Wyznacznik macierzy A pozostaje niezmieniony, gdy elementy w jednym wierszu (kolumnie) zostają dodane do innego wiersza (kolumny).
- Wyznacznik macierzy A jest równy wyznacznikowi macierzy A^{T}.
- Wyznacznik macierzy A zmienia wartość na przeciwną, jeżeli którekolwiek dwa wiersze (kolumny) zostały zamienione miejscami.

Ponadto dla dowolnych macierzy kwadratowych A i B zachodzi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ■

Twierdzenie D.5
Macierz A wymiaru $n \times n$ jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) = 0$. ■

Macierze dodatnio określone

Macierze dodatnio określone odgrywają istotną rolę w wielu zastosowaniach. Macierz A wymiaru $n \times n$ nazywamy ***dodatnio określoną***, jeśli $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ dla każdego wektora x wymiaru n, takiego że $x \neq 0$. Na przykład macierz jednostkowa jest dodatnio określona, ponieważ dla dowolnego niezerowego wektora $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^{\mathrm{T}}$ zachodzi

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}} I_n x &= x^{\mathrm{T}} x \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Macierze pojawiające się w zastosowaniach są często dodatnio określone, co wynika z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie D.6
Dla dowolnej macierzy A o pełnym rzędzie kolumnowym macierz $A^{\mathrm{T}}A$ jest dodatnio określona.

Dowód Musimy pokazać, że $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x > 0$ dla każdego niezerowego wektora x. Weźmy więc dowolny wektor x:

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x &= (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) \qquad\qquad \text{(patrz zad. D.1-2)} \\ &= \|Ax\|^2 . \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że $\|Ax\|^2$ to po prostu suma kwadratów elementów wektora Ax. Zatem $\|Ax\| \geq 0$. Pokażemy przez sprowadzenie do sprzeczności, że $\|Ax\| > 0$. Przypuśćmy, że $\|Ax\|^2 = 0$. Wtedy każdy element Ax jest równy 0, tj. $Ax = 0$. Ponieważ A ma pełny rząd kolumnowy, $Ax = 0$ implikuje $x = 0$, zgodnie z twierdzeniem D.2, co jest sprzeczne z założeniem, że x był niezerowy. Tak więc macierz $A^{\mathrm{T}}A$ jest dodatnio określona. ■

Inne własności macierzy dodatnio określonych są opisane w podrozdz. 28.3. W podrozdziale 33.3 korzystamy z podobnego pojęcia, znanego jako dodatnia półokreśloność. Macierz A o wymiarze $n \times n$ jest ***dodatnio półokreślona*** jeśli $x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0$ dla każdego wektora niezerowego x wymiaru n.

Zadania

D.2-1
Udowodnij, że macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie, czyli że jeśli B i C są macierzami odwrotnymi do A, to $B = C$.

D.2-2
Udowodnij, że wyznacznik macierzy trójkątnej (dolnej lub górnej) jest równy iloczynowi elementów leżących na jej przekątnej. Udowodnij, że macierz odwrotna do macierzy trójkątnej dolnej, jeśli istnieje, też jest trójkątna dolna.

D.2-3
Udowodnij, że jeśli P jest macierzą permutacyjną, to jest ona odwracalna, macierzą odwrotną do niej jest P^{T}, która także jest macierzą permutacyjną.

D.2-4
Niech A i B będą macierzami kwadratowymi takimi, że $AB = I$. Udowodnij, że jeśli macierz A' powstała z A przez dodanie wiersza j do wiersza i, to macierz B' odwrotną do A' można otrzymać przez odjęcie kolumny i od kolumny j w macierzy B.

D.2-5
Niech A będzie nieosobliwą macierzą $n \times n$, której elementy należą do ciała liczb zespolonych. Pokaż, że każdy element macierzy A^{-1} jest rzeczywisty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element macierzy A jest rzeczywisty.

D.2-6
Pokaż, że jeśli A jest nieosobliwą macierzą symetryczną $n \times n$, to macierz A^{-1} jest symetryczna. Pokaż, że jeśli B jest dowolną macierzą $m \times n$, to BAB^{T} jest macierzą symetryczną.

D.2-7
Udowodnij twierdzenie D.2, tzn. pokaż, że macierz A ma pełny rząd kolumnowy wtedy i tylko wtedy, gdy równość $Ax = 0$ implikuje $x = 0$. (*Wskazówka:* Wyraź liniową zależność jednej kolumny od innych jako równanie macierzowo-wektorowe).

D.2-8
Udowodnij, że dla dowolnych dwóch pasujących do siebie macierzy A i B zachodzi

$$\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\},$$

przy czym równość zachodzi wtedy, gdy przynajmniej jedna z macierzy A lub B jest nieosobliwą macierzą kwadratową. (*Wskazówka:* Użyj alternatywnej definicji rzędu macierzy).

Problemy

D-1 Macierz Vandermonde'a
Niech będą dane liczby $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Udowodnij, że wyznacznik ***macierzy Vandermonde'a***

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

wynosi

$$\det(V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})) = \prod_{0 \le j < k \le n-1} (x_k - x_j).$$

(*Wskazówka:* Pomnóż kolumnę i przez $-x_0$, po czym wynik dodaj do kolumny $i + 1$ dla $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, a następnie użyj indukcji).

D-2 Permutacje definiowane jako mnożenie macierzy przez wektor nad ciałem GF(2)
Jedną z klas permutacji liczb całkowitych ze zbioru $S_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ definiuje się przez mnożenie macierzy nad $GF(2)$. Na binarną reprezentację każdej liczby x z S_n możemy patrzeć jak na n-bitowy wektor

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix},$$

gdzie $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$. Jeśli A jest macierzą $n \times n$, której każdy element jest równy albo 0, albo 1, to możemy zdefiniować permutację odwzorowującą każdą wartość x z S_n na liczbę, której reprezentacja binarna równa się iloczynowi Ax. Tutaj operacje arytmetyczne są wykonywane nad $\boldsymbol{GF(2)}$: każda z wartości jest albo 0, albo 1 i z jednym wyjątkiem wszystkie zasady dodawania i mnożenia mają zastosowanie. Wyjątek polega na tym, że $1 + 1 = 0$. O arytmetyce nad $GF(2)$ możemy myśleć jak o zwykłej arytmetyce dla liczb całkowitych, z tym wyjątkiem że używamy tylko najmniej znaczących bitów.

Na przykład dla $S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definiuje następującą permutację π_A: $\pi_A(0) = 0$, $\pi_A(1) = 3$, $\pi_A(2) = 2$, $\pi_A(3) = 1$. Żeby zrozumieć, dlaczego $\pi_A(3) = 1$, zauważmy, że pracując nad $GF(2)$,

$$\begin{aligned} \pi_A(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

co jest binarną reprezentacją 1.

W dalszej części opisu tego problemu przyjmujemy, że pracujemy nad $GF(2)$ i że elementami wszystkich wektorów i macierzy są 0 i 1. ***Rząd*** macierzy zero-jedynkowej (macierzy z elementami o wartościach 0 lub 1) nad $GF(2)$ definiuje się tak samo jak dla zwykłych macierzy, ale przy założeniu, że operacje arytmetyczne wykonywane dla określenia liniowej niezależności są wykonywane nad $GF(2)$. Zdefiniujmy ***zakres*** macierzy zero-jedynkowej A wymiaru $n \times n$, jako

$$R(A) = \{y : y = Ax \text{ dla pewnego } x \in S_n\}.$$

Zatem $R(A)$ jest zbiorem liczb z S_n, które można otrzymać, mnożąc elementy x z S_n przez A.

(a) Udowodnij, że jeśli r jest rzędem macierzy A, to $|R(A)| = 2^r$. Wywnioskuj z tego, że A definiuje permutację nad S_n tylko wtedy, gdy A ma pełny rząd.

Dla danych macierzy A wymiaru $n \times n$ i elementu $y \in R(A)$ definiujemy ***przeciwobraz*** y jako

$$P(A, y) = \{x : Ax = y\}.$$

Tak więc $P(A, y)$ jest zbiorem tych wartości z S_n, które pomnożone przez A dają y.

(b) Udowodnij, że jeśli r jest rzędem macierzy A wymiaru $n \times n$ i $y \in R(A)$, to $|P(A, y)| = 2^{n-r}$.

Niech $0 \le m \le n$ i załóżmy, że dzielimy zbiór S_n na bloki kolejnych liczb w taki sposób, że i-ty blok składa się z 2^m liczb $i2^m, i2^m+1, i2^m+2, \ldots, (i+1)2^m-1$. Dla każdego podzbioru $S \subset S_n$ definiujemy $B(S,m)$ jako zbiór wszystkich bloków z S_n o wymiarach 2^m zawierających co najmniej jeden element z S. Na przykład dla $n=3$, $m=1$ oraz $S=\{1,4,5\}$ zbiór $B(S,m)$ składa się z bloków 0 (ponieważ 1 jest w bloku 0) i 2 (ponieważ 4 i 5 są w bloku 2).

(c) Niech r będzie rzędem dolnej-lewej $(n-m)\times m$ podmacierzy macierzy A, czyli macierzy zbudowanej w wyniku przecięcia dolnych $n-m$ wierszy i m skrajnie lewych kolumn macierzy A. Niech S będzie dowolnym blokiem w S_n o wymiarze 2^m, a $S'=\{y\colon\ y = Ax$ dla pewnego $x \in S\}$. Udowodnij, że $|B(S',m)| = 2^r$ oraz że dla każdego bloku w $B(S',m)$ dokładnie 2^{m-r} liczb z S jest odwzorowywanych na ten blok.

Ponieważ w wyniku pomnożenia wektora zerowego przez jakąkolwiek macierz dostajemy wektor zerowy, zbiór permutacji S_n zdefiniowanych przez mnożenie nad $GF(2)$ zero-jedynkowej macierzy $n\times n$ o pełnym rzędzie nie może zawierać wszystkich permutacji S_n. Rozszerzmy klasę permutacji definiowanych przez mnożenie macierzy przez wektor o składnik addytywny w taki sposób, że $x \in S_n$ jest odwzorowywane na $Ax+c$, gdzie c jest n-bitowym wektorem i dodawanie jest wykonywane nad $GF(2)$. Na przykład, gdy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

dostajemy następującą permutację $\pi_{A,c}$: $\pi_{A,c}(0)=2$, $\pi_{A,c}(1)=1$, $\pi_{A,c}(2)=0$, $\pi_{A,c}(3)=3$. Permutację, która odwzorowuje $x \in S_n$ na $Ax+c$, dla pewnej zero-jedynkowej macierzy A wymiaru $n\times n$ o pełnym rzędzie i pewnego n-bitowego wektora c, nazywamy ***permutacją liniową***.

(d) Przelicz, że liczba liniowych permutacji zbioru S_n jest dużo mniejsza niż liczba wszystkich permutacji S_n.

(e) Podaj przykład liczby n i permutacji zbioru S_n, która nie może być wyrażona za pomocą żadnej liniowej permutacji. (*Wskazówka:* Dla zadanej permutacji pomyśl, w jaki sposób mnożenie macierzy przez wektor jednostkowy wiąże ze sobą kolumny tej macierzy).

Uwagi do dodatku

Podręczniki z algebry liniowej zawierają bardzo wiele podstawowych informacji na temat macierzy. Szczególnie dobre są książki Stranga [422, 423].